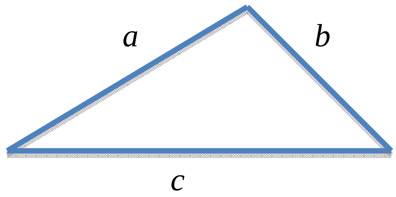
FÓRMULA DE HERÓN

Herón de Alejandría vivió hacia el siglo III a. de C. Son conocidas varias obras suyas, pero se le recuerda sobre todo por la llamada fórmula de Herón, que nos permite calcular el área de un triángulo conocidos los tres lados. No es necesario por tanto conocer la altura ni ninguno de los ángulos. Si llamamos s al semiperímetro y a, b, c a los tres lados:



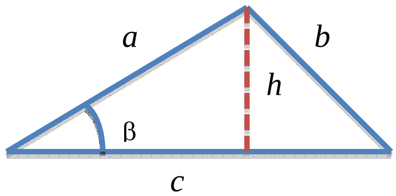
Llamando al semiperímetro

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

entonces el área puede expresarse como

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

La **demostración** de Herón es realmente sorprendente. Combinando elementos geométricos sencillos llega a construir una de las demostraciones más ricas y elegantes de toda la matemática. Presentamos aquí otra más moderna basada en el teorema del coseno.



La fórmula clásica para el área del triángulo nos dice que $A=\frac{c\cdot h}{2}$, o lo que es lo mismo,

$$A=\frac{c\cdot a\cdot \operatorname{sen}\beta}{2}.$$

Por otro lado, el teorema del coseno nos asegura que $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$.

El camino a seguir será despejar cos(β) de la última ecuación y sustituir sen β en la anterior.

Tenemos pues que $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, y como $\operatorname{sen}^2\beta=1-\cos^2\beta$ entonces:

$$\operatorname{sen}\beta=\sqrt{1-\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4a^2c^2}}\qquad \text{o lo que es lo mismo}\qquad \operatorname{sen}\beta=\sqrt{\frac{4a^2c^2-\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4a^2c^2}}$$

Teniendo en cuenta que el numerador es una diferencia de cuadrados y el denominador un cuadrado obtenemos:

$$sen\beta=\frac{\sqrt{\left[2ac-\left(a^2+c^2-b^2\right)\right]\left[2ac+\left(a^2+c^2-b^2\right)\right]}}{2ac}=\frac{\sqrt{\left(b^2-(a-c)^2\right)\left[(a+c)^2-b^2\right]}}{2ac}$$

Sustituyendo ahora en la fórmula del área, tenemos que

$$A=\frac{\sqrt{\left[b^2-(a-c)^2\right]\left[(a+c)^2-b^2\right]}}{4}$$

y utilizando de nuevo la descomposición de la diferencia de cuadrados como suma por diferencia, nos queda:

$$A=\frac{\sqrt{(b+a-c)(b-a+c)(a+c+b)(a+c-b)}}{4}$$

Finalmente, introducimos el 4 dentro de la raíz quedando 16, y si observamos que $\frac{b+a-c}{2}=\frac{s-c}{2}$

y que $\dfrac{b-a+c}{2}=\dfrac{s-a}{2}$ y así sucesivamente, llegamos a la fórmula final:

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{q.c.d.}$$